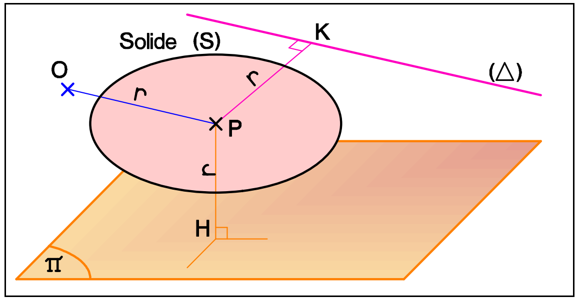
Matrice d'inertie d'un solide

1. Élément d'inertie d'un solide par rapport aux éléments d'un repère

1.1. Définition

Le moment d'inertie par rapport à un plan (π), une droite (Δ) ou un point O est la quantité

$$I = \iiint_{P\in S} r^2.dm = \iiint_{P\in S} r^2.\mu.dv \; ; \; I \text{ en } kg.m^2 \; [\,M\; L^2\,]$$



Moment d'inertie

Remarque : m étant la masse du solide (S), on désigne parfois le moment d'inertie par $I = m.R_g^2$

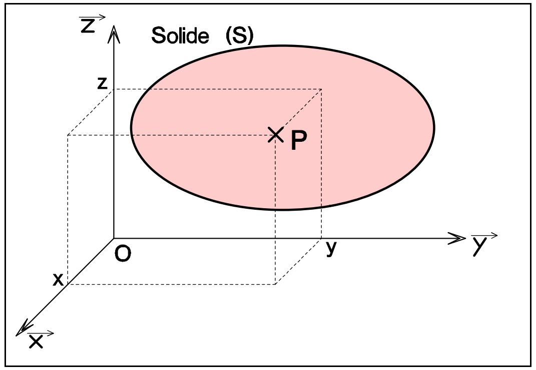
R_g (ou K) étant appelé rayon de giration.

1.2. Moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'un repère

On considère de solide (S) de masse volumique μ ainsi que le repère orthonormé $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Les moments d'inertie par rapport aux axes principaux du repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sont les grandeurs positives ou nulles :

$$\begin{cases} A = I_{(O,\vec{x})} = \iiint_{P\in S} (y^2+z^2).dm = YY+ZZ \\ B = I_{(O,\vec{y})} = \iiint_{P\in S} (x^2+z^2).dm = XX+ZZ \\ C = I_{(O,\vec{z})} = \iiint_{P\in S} (x^2+y^2).dm = XX+YY \end{cases}$$



Remarque : pour déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes du repère il peut être intéressant de calculer préalablement :

- Les moments d'inertie par rapport aux plans principaux du repère qui s'expriment par :

$$\begin{cases} I_{(O,\vec{y},\vec{z})} = A' = XX = \iiint_{P\in S} x^2.dm \\ I_{(O,\vec{z},\vec{x})} = B' = YY = \iiint_{P\in S} y^2.dm \\ I_{(O,\vec{x},\vec{y})} = C' = ZZ = \iiint_{P\in S} z^2.dm \end{cases}$$

- Le moment d'inertie par rapport au centre O du repère qui s'exprime par

$$I_O = \iiint_{P\in S} (x^2+y^2+z^2).dm = XX+YY+ZZ$$

1.2. Produits d'inertie d'un solide par rapport aux plans principaux d'un repère

Ce sont les quantités positives, négatives ou nulles

$$\begin{cases} I_{yz} = D = \iiint_{P\in S} y.z.dm \\ I_{zx} = E = \iiint_{P\in S} x.z.dm \\ I_{xy} = F = \iiint_{P\in S} x.y.dm \end{cases}$$

Remarque : Les notations des grandeurs A, B, C, D, E et F sont standardisées : elles doivent être parfaitement connues

2. Moment d'inertie par rapport à une droite (Δ) quelconque

2.1. Matrice d'inertie

$\mathcal{R} = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère orthonormé .

(Δ) est une droite passant par O, de vecteur directeur unitaire $\vec{i} = \alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}+\gamma.\vec{z}$ c'est-à-dire que $\left\|\vec{i}\right\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = 1$

Par définition

$$\boxed{I_{(\Delta,S)} = \iiint_{P\in S} r^2.dm = \iiint_{P\in S} (\overrightarrow{HP})^2.dm}$$

Expression que l'on peut mettre sous une forme faisant intervenir uniquement les coordonnées α, β, γ connues du vecteur $\vec{i}$ et les coordonnées x, y et z connues du point P :

$$\boxed{I_{(\Delta,S)} = \vec{i}.\iiint_{P\in S} (\overrightarrow{\mathbf{OP}}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{\mathbf{OP}})).dm}$$

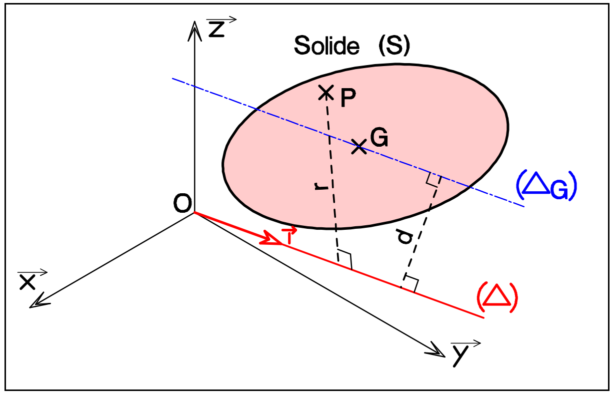
L'expression $\iiint_{P\in S} (\overrightarrow{OP}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP})).dm$ est une fonction vectorielle (bien connue des mathématiciens) que l'on peut mettre sous une forme matricielle :

$$\boxed{\iiint_{P\in S} (\overrightarrow{OP}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP})).dm = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$$

On note $\boxed{J_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$ matrice ou opérateur d'inertie du solide (S) au point O, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, matrice symétrique dans laquelle les coefficients A, B, C, D, E et F sont ceux calculés aux paragraphes 1.2 et 1.3

Alors

$$\boxed{I_{(\Delta,S)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} . \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \vec{i}.(J_{(O,S)}.\vec{i})}$$



Rappel de géométrie vectorielle

- Sur le produit mixte

$(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) = \vec{X}.(\vec{Y}\wedge\vec{Z}) = (\vec{X}\wedge\vec{Y}).\vec{Z}$

- Sur le double produit vectoriel

$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

- Expression vectorielle de $I_{(\Delta,S)}$

$$(\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP})^2 = (\vec{i}\wedge(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}))^2 = (\underbrace{\vec{i}\wedge\overrightarrow{OH}}_{\substack{=\vec{0}\text{ car}\\ OH//\vec{i}}}+\vec{i}\wedge\overrightarrow{HP})^2 = (\vec{i}\wedge\overrightarrow{HP})^2$$

D'où $\left\|\vec{i}\wedge\overrightarrow{\mathbf{OP}}\right\|^2 = \underbrace{\left\|\vec{i}\wedge\overrightarrow{\mathbf{HP}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\mathbf{HP}}\right\|^2}_{\text{Car } \overrightarrow{\mathbf{HP}}\perp\vec{i} \text{ et } \left\|\vec{i}\right\|=1}$ donc $I_{(\Delta,S)} = \iiint_{P\in S} (\overrightarrow{\mathbf{HP}})^2.dm = \iiint_{P\in S} (\vec{i}\wedge\overrightarrow{\mathbf{OP}})^2.dm$

Mais (voir rappel ci-dessus) : $(\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP})^2 = (\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}).(\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}) = (\vec{i},\overrightarrow{OP},\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}) = \vec{i}.(\overrightarrow{OP}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}))$

Donc $I_{(\Delta,S)} = \iiint_{P\in S} (\overrightarrow{\mathbf{HP}})^2.dm = \iiint_{P\in S} \vec{i}.(\overrightarrow{\mathbf{OP}}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{\mathbf{OP}})).dm = \vec{i}.\iiint_{P\in S} (\overrightarrow{\mathbf{OP}}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{\mathbf{OP}})).dm$

- Forme matricielle de $I_{(\Delta,S)}$

Une méthode par calcul direct est tout à fait possible. La méthode proposée est plus rapide.

$\overrightarrow{OP}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}) = \vec{i}.(\overrightarrow{OP})^2 - \overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{OP}.\vec{i}) = (\alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}+\gamma.\vec{z}).(x^2+y^2+z^2) - (x.\vec{x}+y.\vec{y}+z.\vec{z}).(\alpha.x+\beta.y+\gamma.z)$

Donc

$\vec{i}.(\overrightarrow{OP}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP})) = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).(x^2+y^2+z^2) - (x.\alpha+y.\beta+z.\beta).(\alpha.x+\beta.y+\gamma.z)$

$= \alpha^2.(y^2+z^2)+\beta^2.(x^2+z^2)+\gamma^2.(x^2+y^2) - 2.\alpha.\beta.x.y - 2\alpha.\gamma.x.z - 2.\beta.\gamma.y.z$

Puis par identification pour obtenir la forme matricielle…

2.2. Changement de point

Si G est le centre d'inertie du solide (S) de masse m, si $\overrightarrow{GP}=x.\vec{x}+y.\vec{y}+z.\vec{z}$ et si $\overrightarrow{HG}=a.\vec{x}+b.\vec{y}+c.\vec{z}$ alors :

$$\boxed{J_{(H,S)}=\begin{pmatrix} A_H & -F_H & -E_H \\ -F_H & B_H & -D_H \\ -E_H & -D_H & C_H \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = J_{(G,S)}+\begin{pmatrix} m.(b^2+c^2) & -m.a.b & -m.a.c \\ -m.a.b & m.(a^2+c^2) & -m.b.c \\ -m.a.c & -m.b.c & m.(a^2+b^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Remarque : pour passer d'un point H à un point K il faut nécessairement passer par le centre d'inertie G

De plus on vérifie que si G est le centre d'inertie du solide (S) de masse m et si (Δ_G) est une droite passant par le centre d'inertie, parallèle à (Δ) et distante de d par rapport à (Δ), alors :

$$\boxed{I_{(\Delta,S)}=I_{(\Delta_G,S)}+\underbrace{m.d^2}_{\geq 0}}$$

Le moment d'inertie est minimum par rapport à une droite passant par son centre d'inertie.

2.3. Changement de base (très peu utilisé)

On note $\mathcal{P}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_0$ telle que $\vec{v}_0=\mathcal{P}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)\ \vec{v}_1$

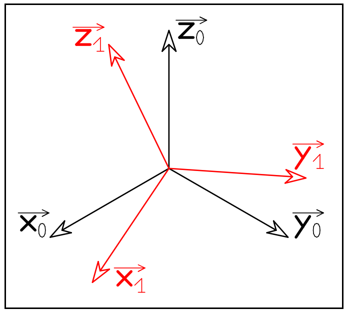
$$\mathcal{P}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)=\left(\begin{pmatrix}\text{expression}\\ \text{de } \vec{x}_1\\ \text{dans } \mathcal{B}_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{expression}\\ \text{de } \vec{y}_1\\ \text{dans } \mathcal{B}_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{expression}\\ \text{de } \vec{z}_1\\ \text{dans } \mathcal{B}_0\end{pmatrix}\right)$$

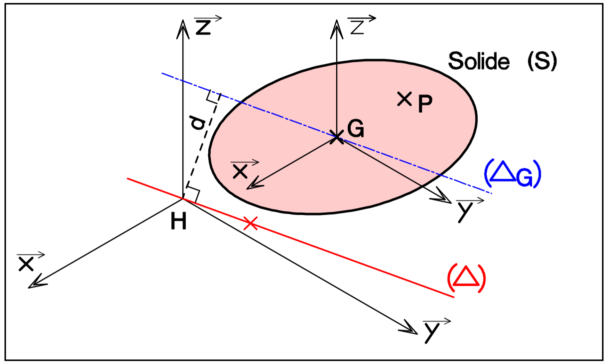
La matrice inverse se calculant par

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)=\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0)={}^t\mathcal{P}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$$

Alors

$$J_{(O,S)_{\mathcal{B}_1}}=\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)\ \ J_{(O,S)_{\mathcal{B}_0}}\ \ \mathcal{P}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$$





$$\vec{i}.(\overrightarrow{HP}\wedge(\vec{i}\wedge\overrightarrow{HP}))=\vec{i}.\left[(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GP})\wedge(\vec{i}\wedge(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GP}))\right]$$
$$=\alpha^2.\left[(b+y)^2+(c+z)^2\right]+\beta^2.\left[(a+x)^2+(c+z)^2\right]+\gamma^2.\left[(a+x)^2+(b+y)^2\right]$$
$$-2.\alpha.\beta.(a+x).(b+y)-2\alpha.\gamma.(a+x).(c+z)-2.\beta.\gamma.(b+y).(c+z)$$

Alors, G étant le centre d'inertie, en développant, tous les termes

$$\iiint_{P\in S} x.dm=\iiint_{P\in S} y.dm=\iiint_{P\in S} z.dm=0$$

Il restera les termes en

$$\iiint_{P\in S} x^2.dm;\ \iiint_{P\in S} y^2.dm;\ \iiint_{P\in S} z^2.dm$$

$$\iiint_{P\in S} a^2.dm=m.a^2;\ \iiint_{P\in S} b^2.dm=m.b^2;\ \iiint_{P\in S} c^2.dm=m.c^2$$

$$\iiint_{P\in S} x.y.dm;\ \iiint_{P\in S} y.z.dm;\ \iiint_{P\in S} x.z.dm$$

et

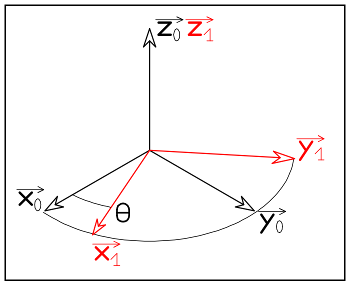
$$\iiint_{P\in S} a.b.dm=m.a.b;\ \iiint_{P\in S} b.c.dm=m.b.c;\ \iiint_{P\in S} a.c.dm=m.a.c$$

D'où le résultat !

Exemple de changement de bases

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et $\mathcal{P}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0)={}^t\mathcal{P}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$



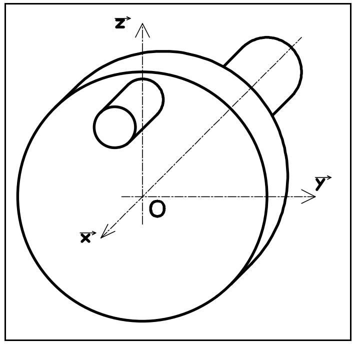
3. Formes particulières des matrices d'inertie

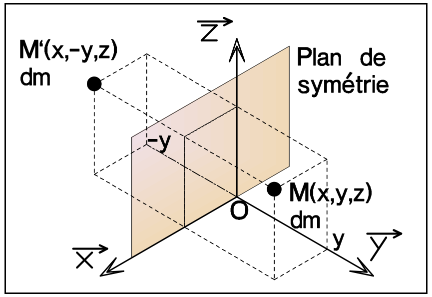
3.1. Un plan du repère est plan de symétrie

⇒ **Deux produits d'inertie sont nuls.**

Ici le plan de symétrie a pour normale $\vec{y}$, les produits X**Y** et **Y**Z sont nuls.

$$J_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}$$





À chaque point x.y.z.dm correspond un point x.(-y).z.dm

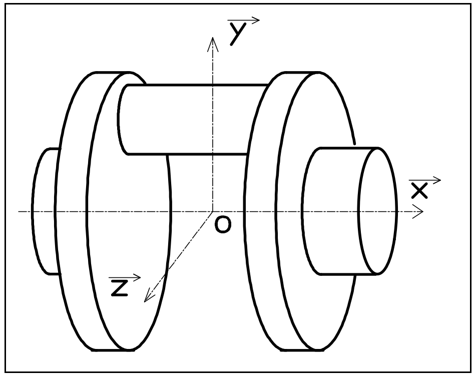
Donc

$$\iiint_{y>0} x.y.dm + \iiint_{y<0} x.y.dm = \iiint_{y>0} x.y.dm - \iiint_{y>0} x.y.dm = 0$$

Idem pour le produit YZ

Remarque : $\iiint_{P\in S} y^2.dm = 2.\iiint_{y>0} y^2.dm$

3.2. Deux plans du repère sont plans de symétrie



⇒ **Les trois produits d'inertie sont nuls**

Démonstration évidente avec ce qui précède !

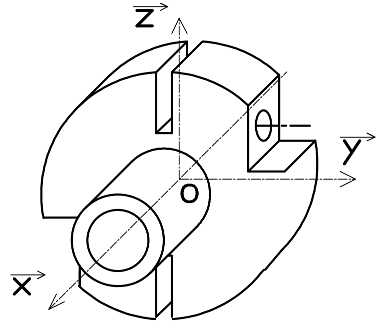
Ici

$$J_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

3.3. Un axe du repère est axe de symétrie, aucun plan du repère n'est plan de symétrie

⇒ **Deux produits d'inertie sont nuls.**

Ici l'axe $(O,\vec{x})$ est axe de symétrie. Les produits d'inertie **X**Y et **X**Z sont nuls



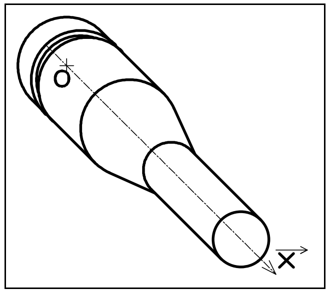
$$J_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}$$

À chaque point x.y.z.dm correspond un point x.(-y).(-z).dm

Donc $\iiint_{y<0} x.y.dm = \iiint_{y>0} x.(-y).dm = -\iiint_{y>0} x.y.dm$ et de même $\iiint_{z<0} x.z.dm = -\iiint_{z>0} x.z.dm$

Mais $\iiint_{\substack{y<0\\z<0}} y.z.dm = \iiint_{\substack{y>0\\z>0}} (-y).(-z).dm. = +\iiint_{\substack{y>0\\z>0}} y.z.dm$, la somme ne s'annule pas

3.4. Un axe du repère est axe de révolution



⇒ **Les trois produits d'inertie sont nuls**

⇒ **Deux moments d'inertie sont identiques**

Ici, dans toute base $(\vec{x},\_,\_)$

$$J_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

Remarque :

Pour les calculs, il est intéressant de noter A=YY+ZZ=RR=moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce (en général on travaille en coordonnées cylindriques)

Alors

B=XX+YY=XX+ZZ=XX+A/2